CONCOURS ESTP - ENSAM

d'admission à :

L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

SESSION 1997

— Filière MP —

MATHÉMATIQUES 2

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir* encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

A la suite réelle (a_n), $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, on associe la suite (b_n) telle que $b_n = \frac{1}{n} \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Enfin, on introduit, pour $k \geq 1$, $S_k = \sum_{\frac{k}{2} \leq j \leq k} \frac{1}{j}$, sommation sur les entiers j satisfaisant à la double inégalité $\frac{k}{2} \leq j \leq k$. Ainsi, par exemple, $S_3 = \sum_{\frac{3}{2} \leq j \leq 3} \frac{1}{j} = \sum_{j=2}^{3} \frac{1}{j}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $S_4 = \sum_{2 \leq j \leq 4} \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$.

Le logarithme népérien de x sera noté $\ell n(x)$.

1 Montrer que la suite (S_k) est majorée en indiquant un majorant M .

2 Prouver que $\lim_{k \to \infty} S_k = \ell n(2)$. [On peut encadrer S_{2j} par deux intégrales.]

3 Établir que $B_n \leq c A_{2n}$, où c >0 est une constante à préciser en fonction de M.

4 A l'aide de ce qui précède, comparer les convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

5 Montrer que $S_k \geq \ell n(2)$. En déduire que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont en fait de même nature.

SUJET 2

Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$, quand la série converge.

1 Déterminer l'ensemble E de définition de la fonction f.

2 Donner pour la dérivée $f'(x)$ une expression simple valable sur $]-1,+1[$.
En déduire le tableau de variation de f.

3 On donne $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $f(-1)$.

4 Pour la courbe d'équation $y = f(x)$, justifier les tangentes en $x = -1$ et $x = +1$.

5 Trouver l'ensemble D de définition de la fonction Φ telle que $\Phi(x) = f(x) + f(-\frac{x}{1-x})$.
Calculer $\Phi'(x)$. En déduire la valeur de $f(\frac{1}{2})$.

SUJET 3

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, où x est une variable réelle.

1 Préciser les nombres complexes A et B, tels que $f(x) = \frac{A}{x-j} + \frac{B}{x-j^2}$, avec $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$,
et $j^2 = \bar{j} = \exp(-i\frac{2\pi}{3})$.

2 Déterminer le complexe C_n tel que $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = C_n \left[\frac{1}{(x-j)^{n+1}} - \frac{1}{(x-j^2)^{n+1}} \right]$.

3 Montrer l'existence d'un polynôme à coefficients entiers P_n tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$.
Préciser, dans ce polynôme, le monôme de plus haut degré.

4 Établir que , pour tout x réel, et tout entier $n \geq 0$, on a $\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq K.L^n$, où K et L sont des constantes positives dont on donnera des valeurs possibles.

5 Déterminer les racines de $P_n(x) = 0$, $n \geq 1$.

SUJET 4

Pour tout nombre complexe z et tout entier $n \geq 1$, on pose $D_n(z) = e^z - \left[1+\frac{z}{n}\right]^n$.

1 Établir que $D_n(z)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k(n)\frac{z^k}{k!} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{z^p}{p!}$, où $a_k(n)$ est, pour $k \geq 1$, un polynôme en $\frac{1}{n}$ de degré k-1, avec $a_0(n) = 0$, $a_1(n) = 0$, $a_2(n) = \frac{1}{n}$. Calculer $a_3(n)$.

2 Démontrer la double inégalité $0 \leq a_k(n) \leq \frac{k(k-1)}{2n}$. [On peut opérer par récurrence.]

3 Avec ce qui précède, ou autrement, prouver l'inégalité $|D_n(z)| \leq \frac{|z|^2}{2n} e^{|z|}$.

4 Montrer que $D_n(z)$ converge uniformément vers 0 sur tout compact K de $\mathbb{C}$.

5 On suppose x réel et n pair, $n = 2m$, $m \geq 1$. Prouver que $D_{2m}(x)$ possède **UNE SEULE** racine ξ_m sur $]-\infty, 0[$, telle que $\xi_m = \lambda m$, où la constante λ est racine d'une équation à préciser.

SUJET 5

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $xy' - y = -(x-1)^2$, $x>0$.

1 Montrer que toute solution de $(\mathscr{E})$ est de la forme $y_\lambda(x) = \varphi(x) + \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ est une fonction à déterminer. [On peut remarquer que $xy' - y = x^2 \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x}\right]$.]

2 Préciser $\lim_{x \to 0+} y_\lambda(x)$. Même question pour $\lim_{x \to 0+} y'_\lambda(x)$.

3 Que vaut $I(\lambda) = \int_0^1 y_\lambda(x)\,dx$?

4 Reconnaître et dessiner le lieu géométrique Ξ des points du demi-plan $x>0$ où les courbes solutions de $(\mathscr{E})$ admettent une tangente parallèle à (Ox).

5 Démontrer que l'équation $y_\lambda(x) = 0$ admet une solution unique.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail